3.7 Метод дробных шагов для трехмерного уравнения параболического типа

Уравнения теплопроводности является параболическим типом в частных производных. В декартовой системе координат трехмерное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

Для полноты задачи нужно будет поставить начальные и граничные условия (в отличие от двумерного уравнения здесь будет существовать дополнительные два условия, что в итоге дает нам шесть граничных условий), к примеру

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad u\big|_{x=0} = 1 \qquad u\big|_{x=1} = 0 \qquad u\big|_{y=0} = 0 \qquad u\big|_{y=1} = 0$$
$$u\big|_{z=0} = 0 \qquad u\big|_{z=1} = 0$$

При применении обычных методов к решению трехмерного уравнения теплопроводности с условно устойчивым алгоритмом возникают много проблем с подбором параметров для того чтобы выполнялись условия устойчивости, привели к созданию неявных схем стабилизирующих поправок Дугласа (Метод дробных шагов). Применяя схему стабилизирующих поправок, получим трехшаговую разностную схему:

Шаг 1

$$\frac{u_{i\,jk}^{\,n+1/3} - u_{ijk}^{\,n}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_1 u^n) + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n$$

Шаг 2

$$\frac{u_{i\,jk}^{\;n+2/3} - u_{ijk}^{\;n+1/3}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_2 u^{n+2/3} - \Lambda_2 u^n)$$

Шаг 3

$$\frac{u_{i\,jk}^{\;n+1} - u_{ijk}^{\;n+2/3}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_3 u^{n+1} - \Lambda_3 u^n)$$

где операторы имеют вид

$$\Lambda_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Lambda_3 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Расписав первый шаг, получим

$$\frac{u_{i\,jk}^{\;n+1/3} - u_{ijk}^{\;n}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1\,jk}^{n+1/2} - 2u_{ijk}^{n+1/2} + u_{i-1\,jk}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1\,jk}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{i-1\,jk}^{n}}{\Delta x^2}\right) + \quad (2)$$

$$+ \frac{u_{ij+1k}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^{n} - 2u_{ij}^{n} + u_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^2}$$

Второй шаг:

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+2/3}-u_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{ij+1k}^{n+2/3}-2u_{ijk}^{n+2/3}+u_{ij-1k}^{n+2/3}}{\Delta y^2}-\frac{u_{ij+1k}^{n}-2u_{ijk}^{n}+u_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^2}\right) \qquad (3)$$

А третий шаг можно расписать в таком виде

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+1}-u_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{ijk+1}^{n+1}-2u_{ijk}^{n+1}+u_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta z^2}-\frac{u_{ijk+1}^{n}-2u_{ijk}^{n}+u_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^2}\right) \qquad (4)$$

В результате проведенного «расщепления» задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. На шаге 1 такая система решается для каждой i (ряда точек с фиксированным j и k), а на шаге 2 — для каждого j (ряда точек с фиксированным i и k), а на шаге 3 для каждого k (ряда точек с фиксированным i и j). Неявный метод стабилизирующих поправок обладает вторым порядком точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2,(\Delta t)^2,(\Delta y)^2,(\Delta z)^2)$.

Для первого шага получающейся систему алгебраических уравнений решим методом прогонки. Приведем систему алгебраических уравнений (2) к такому виду:

$$A_i u_{i+1}+B_i u_i+C_i u_{i-1}=D_i,\, i=1,N-1 \qquad (5)$$

И здесь

$$A_i=-\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$D_i = \frac{u_i^{\ n}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{u_{i+1\,jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i-1\,jk}^n}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{u_{ij+1k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij-1k}^n}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ijk-1}^n}{\Delta z^2}$$

Для второго шага мы получим иные значения

$$A_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$D_i = \frac{u_i^{\ n}}{\Delta t} - \frac{1}{2}\frac{u_{ij+1k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij-1k}^n}{\Delta y^2}$$

Для третьего шага значения будут иметь вид

$$A_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$D_i = \frac{u_i^{\ n}}{\Delta t} - \frac{1}{2}\frac{u_{ijk+1}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ijk-1}^n}{\Delta z^2}$$

Метод дробных шагов является абсолютно устойчивой схемой.

3.8 Метод переменных направлений для трехмерного уравнения параболического типа

Возьмем то же уравнения теплопроводности как в параграфе 3.7. Метод переменных направлений тоже является неявной схемой и делится на три шага.

Шаг 1

$$\frac{u_{i\,j}^{\ n+1/3} - u_{ij}^{\ \ n}}{\Delta t} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n$$

Шаг 2

$$\frac{u_{i\,j}^{\ n+2/3} - u_{ij}^{\ \ n+1/3}}{\Delta t} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1/3}$$

Шаг 3

$$\frac{u_{i\,j}^{\ n+1} - u_{ij}^{\ \ n+2/3}}{\Delta t} = \Lambda_1 u^{n+2/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1}$$

где операторы имеют вид

$$\Lambda_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Неявный метод переменных направлений обладает вторым порядком точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2, (\Delta y)^2, (\Delta z)^2)$.

Давайте полностью распишем первый шаг

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+1/3} - u_{ijk}^{\;n}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1\,jk}^{n+1/3} - 2u_{ijk}^{n+1/3} + u_{i-1\,jk}^{n+1/3}}{\Delta x^2} + \\ + \frac{u_{ij+1k}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^2} \qquad (2)$$

Далее, расписав второй шаг, получим

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+2/3} - u_{ijk}^{\;n+1/3}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1\,jk}^{n+1/3} - 2u_{ijk}^{n+1/3} + u_{i-1\,jk}^{n+1/3}}{\Delta x^2} + \\ + \frac{u_{ij+1k}^{n+2/3} - 2u_{ijk}^{n+2/3} + u_{ij-1k}^{n+2/3}}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^{n+1/3} - 2u_{ijk}^{n+1/3} + u_{ijk-1}^{n+1/3}}{\Delta z^2} \qquad (3)$$

~~А~~ Третий шаг может быть расписан в виде

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+1} - u_{ijk}^{\;n+2/3}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1\,jk}^{n+2/3} - 2u_{ijk}^{n+2/3} + u_{i-1\,jk}^{n+2/3}}{\Delta x^2} + \\ + \frac{u_{ij+1k}^{n+2/3} - 2u_{ijk}^{n+2/3} + u_{ij-1k}^{n+2/3}}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^{n+1} - 2u_{ijk}^{n+1} + u_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \qquad (4)$$

Для первого шага полученную систему алгебраических уравнений решим методом прогонки. Приведем систему алгебраических уравнений (2) к такому виду:

$$A_i u_{i+1} + B_i u_i + C_i u_{i-1} = D_i, i = 1, N-1 \qquad (4)$$

И здесь

$$A_i = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$D_i = \frac{u_{ijk}^{\ n}}{\Delta t} + \frac{u_{ij+1k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij-1k}^n}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ijk-1}^n}{\Delta z^2}$$

Для второго шага мы получим отличные от первого шага значения

$$A_i = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$D_i = \frac{u_{ijk}^{\ n+1/3}}{\Delta t} + \frac{u_{i+1jk}^{n+1/3} - 2u_{ijk}^{n+1/3} + u_{i-1jk}^{n+1/3}}{\Delta x^2} + \frac{u_{ijk+1}^{n+1/3} - 2u_{ijk}^{n+1/3} + u_{ijk-1}^{n+1/3}}{\Delta z^2}$$

Для третьего же шага мы получим

$$A_i = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$D_i = \frac{u_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t} + \frac{u_{i+1jk}^{n+2/3} - 2u_{ijk}^{n+2/3} + u_{i-1jk}^{n+2/3}}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1k}^{n+2/3} - 2u_{ijk}^{n+2/3} + u_{ij-1k}^{n+2/3}}{\Delta y^2}$$

Метод переменных направлений является абсолютно устойчивой схемой.

3.9 Метод дробных шагов для трехмерного уравнения температуры

В декартовой системе координат трехмерное уравнение температуры имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(k_1 \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_2 \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_3 \frac{\partial T}{\partial z}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Применяя схему стабилизирующих поправок, описанную в главе 3.7, получим трехшаговую разностную схему:

Шаг 1

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+1/3} - u_{ijk}^{n}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_1 u^n) + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n$$

Шаг 2

$$\frac{u_{i\,jk}^{\,n+2/3} - u_{ijk}^{\,n+1/3}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_2 u^{n+2/3} - \Lambda_2 u^n)$$

Шаг 3

$$\frac{u_{i\,jk}^{\,n+1} - u_{ijk}^{\,n+2/3}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_3 u^{n+1} - \Lambda_3 u^n)$$

где операторы имеют вид

$$\Lambda_1 = \frac{\partial}{\partial x}(k_1 \frac{\partial}{\partial x}) - u\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\partial}{\partial y}(k_2 \frac{\partial}{\partial y}) - u\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Lambda_3 = \frac{\partial}{\partial z}(k_3 \frac{\partial}{\partial z}) - w\frac{\partial}{\partial z}$$

Давайте распишем последовательно все шаги:
- первый шаг:

$$\frac{T_{i\,jk}^{n+1/3} - T_{ijk}^{\;n}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(k_{1i+1/2\,jk}\,\frac{T_{i+1\,jk}^{n+1/3} - T_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta x^2} +$$

$$+ k_{1i-1/2\,jk}\,\frac{T_{ijk}^{n+1/3} - T_{i-1\,jk}^{n+1/3}}{\Delta x^2} - u_{ijk}^n\,\frac{T_{i+1\,jk}^{n+1/3} + T_{i-1\,jk}^{n+1/3}}{2\Delta x} +$$

$$+ k_{1i+1/2\,jk}\,\frac{T_{i+1\,jk}^{n} - T_{ijk}^{n}}{\Delta x^2} + k_{1i-1/2\,jk}\,\frac{T_{ijk}^{n} - T_{i-1\,jk}^{n}}{\Delta x^2} -$$

$$-u_{ijk}^{n}\frac{T_{i+1jk}^{n}+T_{i-1jk}^{n}}{2\Delta x})+k_{2ij+1/2k}\frac{T_{ij+1k}^{n}-T_{ijk}^{n}}{\Delta y^{2}}+$$

$$+k_{2ij-1/2k}\frac{T_{ijk}^{n}-T_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^{2}}-u_{ijk}^{n}\frac{T_{ij+1k}^{n}+T_{ij-1k}^{n}}{2\Delta y} \qquad (2)$$

$$+k_{3ijk+1/2}\frac{T_{ijk+1}^{n}-T_{ijk}^{n}}{\Delta z^{2}}+k_{3ijk-1/2}\frac{T_{ijk}^{n}-T_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^{2}}-$$

$$-u_{ijk}^{n}\frac{T_{ijk+1}^{n}+T_{ijk-1}^{n}}{2\Delta z}$$

- второй шаг:

$$\frac{T_{i\,jk}^{n+2/3}-T_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t}=\frac{1}{2}(k_{2ij+1/2k}\frac{T_{ij+1k}^{n+2/3}-T_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta y^{2}}+$$

$$+k_{2ij-1/2k}\frac{T_{ijk}^{n+2/3}-T_{ij-1k}^{n+2/3}}{\Delta y^{2}}-u_{ijk}^{n}\frac{T_{ij+1k}^{n+2/3}+T_{ij-1k}^{n+2/3}}{2\Delta y}- \qquad (3)$$

$$-k_{2ij+1/2k}\frac{T_{ij+1k}^{n}-T_{ijk}^{n}}{\Delta y^{2}}-k_{2ij-1/2k}\frac{T_{ijk}^{n}-T_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^{2}}+$$

$$+u_{ijk}^{n}\frac{T_{ij+1k}^{n}+T_{ij-1k}^{n}}{2\Delta y})$$

- третий шаг:

$$\frac{T_{i\,jk}^{n+1} - T_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(k_{3ijk+1/2}\frac{T_{ijk+1}^{n+1} - T_{ijk}^{n+1}}{\Delta z^2} + \\ + k_{3ijk-1/2}\frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta z^2} - u_{ijk}^{n}\frac{T_{ijk+1}^{n+1} + T_{ijk-1}^{n+1}}{2\Delta z} - \\ - k_{3ijk+1/2}\frac{T_{ijk+1}^{n} - T_{ijk}^{n}}{\Delta z^2} - k_{3ijk-1/2}\frac{T_{ijk}^{n} - T_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^2} + \\ + u_{ijk}^{n}\frac{T_{ijk+1}^{n} + T_{ijk-1}^{n}}{2\Delta z}) \qquad (4)$$

Задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, после применения метода «расщипления». На шаге 1 такая система решается для каждой i (ряда точек с фиксированным j и k), а на шаге 2 — для каждого j (ряда точек с фиксированным i и k), а на шаге 3 для каждого k (ряда точек с фиксированным i и j). Неявный метод стабилизирующих поправок обладает вторым порядком точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2, (\Delta y)^2, (\Delta z)^2)$.

Для первого шага полученную систему алгебраических уравнений решим методом прогонки. Приведем систему алгебраических уравнений (2) к такому виду:

$$A_i u_{i+1} + B_i u_i + C_i u_{i-1} = D_i, i = 1, N-1 \qquad (5)$$

Здесь

$$A_i = -\frac{k_{1i+1/2\,jk}}{2\Delta x^2} + \frac{u_{ijk}^{n}}{4\Delta x}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_{1i+1/2jk}}{2\Delta x^2} - \frac{k_{1i-1/2jk}}{2\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{k_{1i-1/2jk}}{2\Delta x^2} + \frac{u_{ijk}^n}{4\Delta x}$$

$$D_i = \frac{T_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(k_{1i+1/2jk}\ \frac{T_{i+1jk}^n - T_{ijk}^n}{\Delta x^2} + k_{1i-1/2jk}\ \frac{T_{ijk}^n - T_{i-1jk}^n}{\Delta x^2} -$$

$$- u_{ijk}^n\ \frac{T_{i+1jk}^n + T_{i-1jk}^n}{2\Delta x}) + k_{2ij+1/2k}\ \frac{T_{ij+1k}^n - T_{ijk}^n}{\Delta y^2} +$$

$$+ k_{2ij-1/2k}\ \frac{T_{ijk}^n - T_{ij-1k}^n}{\Delta y^2} - u_{ijk}^n\ \frac{T_{ij+1k}^n + T_{ij-1k}^n}{2\Delta y}$$

$$+ k_{3ijk+1/2}\ \frac{T_{ijk+1}^n - T_{ijk}^n}{\Delta z^2} + k_{3ijk-1/2}\ \frac{T_{ijk}^n - T_{ijk-1}^n}{\Delta z^2} - u_{ijk}^n\ \frac{T_{ijk+1}^n + T_{ijk-1}^n}{2\Delta z}$$

Для второго шага мы получим иные значения коэффициентов

$$A_i = -\frac{k_{1i+1/2jk}}{2\Delta x^2} + \frac{u_{ijk}^n}{4\Delta x}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_{1i+1/2jk}}{2\Delta x^2} - \frac{k_{1i-1/2jk}}{2\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{k_{1i-1/2jk}}{2\Delta x^2} + \frac{u_{ijk}^n}{4\Delta x}$$